Избранные теоремы и методы планиметрии

Плюнь тому в глаза, кто скажет,
что можно обнять необъятное!

К. Прутков.

§ 1. Свойство биссектрисы угла треугольника

Теорема П1.1. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Приведём два доказательства этой теоремы.

Первое доказательство. Пусть в треугольнике ABC отрезок AA_1 — биссектриса внутреннего угла A; $AB = c$, $AC = b$, $BA_1 = m$, $A_1C = n$. Докажем, что

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{c}{b}.} \qquad \text{(П1.1)}$$

Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AA_1, до пересечения с прямой AC в точке D (рис. П1). Заметим, что $\angle DBA = \angle BAA_1$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных BD и AA_1 и секущей AB), $\angle BDA = \angle A_1AC$ (как соответственные при параллельных BD и AA_1 и секущей CD). По определению биссектрисы $\angle BAA_1 = \angle A_1AC$. Из полученных равенств вытекает, что $\angle DBA = \angle BDA$, поэтому треугольник ABD равнобедренный ($AB = AD = c$). По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AD}{AC}$, а это в наших обозначениях и есть равенство (П1.1). □

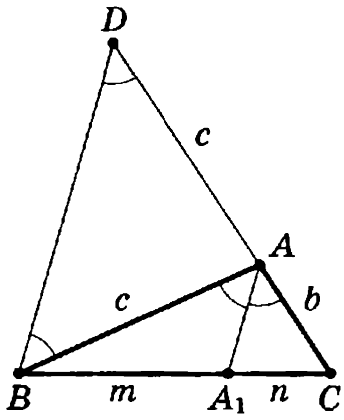

Рис. П1

Второе доказательство. В дополнение к обозначениям из первого доказательства положим $\angle A = 2\alpha$, $AA_1 = l$

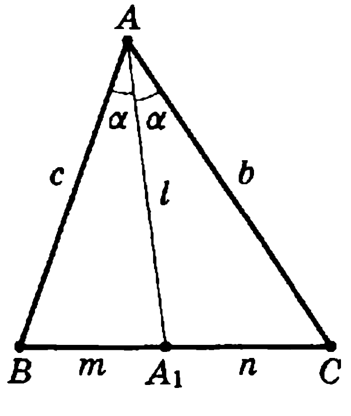

Рис. П2

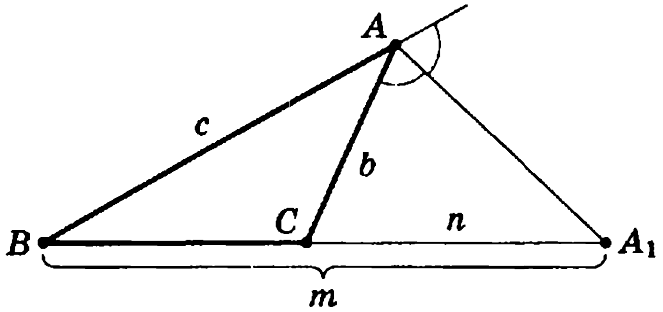

Рис. П3

(рис. П2). Так как у треугольников ABA_1 и AA_1C общая высота, опущенная из вершины A, их площади относятся как $m:n$; $S_{ABA_1}=\frac{1}{2}cl\sin\alpha$, $S_{AA_1C}=\frac{1}{2}bl\sin\alpha$, следовательно,

$$\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{2}cl\sin\alpha}{\frac{1}{2}bl\sin\alpha}=\frac{c}{b}. \qquad \square$$

☞ **Упражнение П1.1.** Пусть в $\triangle ABC$ $\angle B\neq\angle C$, отрезок AA_1 — биссектриса внешнего угла A (рис. П3); $AB=c$, $AC=b$, $BA_1=m$, $A_1C=n$. Докажите справедливость равенства (П1.1).

☞ **Упражнение П1.2.** Сформулируйте и докажите теорему, обратную к теореме П1.1, а также утверждение, обратное к утверждению из предыдущего упражнения.

Задачи к § 1

П1.1. Пусть в треугольнике ABC $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, I — центр вписанной окружности, AA_1 — биссектриса угла A. Докажите, что $AI:IA_1=(b+c):a$.

П1.2. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n. Найдите другой катет и гипотенузу.

П1.3. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.