

ПЛАНИМЕТРИЯ–1. СВОЙСТВА БИСSEКТРИСЫ

1. Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, I — центр вписанной окружности, AA_1 — биссектриса угла A . Докажите, что $AI : IA_1 = (b + c) : a$.
2. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n . Найдите другой катет и гипотенузу.
3. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.
4. Биссектриса треугольника делит одну из его сторон на отрезки с длинами 3 и 5. В каких границах может изменяться периметр треугольника?
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат $ABDE$. В каком отношении делит сторону DE биссектриса угла C , если $AC = 1$, $BC = 3$?
6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD . Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB .
7. В треугольнике со сторонами a , b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противоположащими сторонами служат вершинами второго треугольника. Найдите отношение площадей этих треугольников.
8. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади четырёхугольника $ODCE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
9. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Пусть Q — точка пересечения отрезков AN и CM . Докажите, что DQ — биссектриса угла D .
10. Длины сторон треугольника различны и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна одной из сторон треугольника.
11. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной в него окружности втрое меньше одной из высот треугольника.
12. Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите, что
$$\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$$
13. Две стороны треугольника равны 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.
14. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает эти окружности в точках C и D , причём точка A лежит между C и D , а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB .
15. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , углы ABC и BCD равны, $AB = CD$, AE — биссектриса угла A . Докажите, что отрезки CD и AB параллельны.