Замощения плоскости и пространства

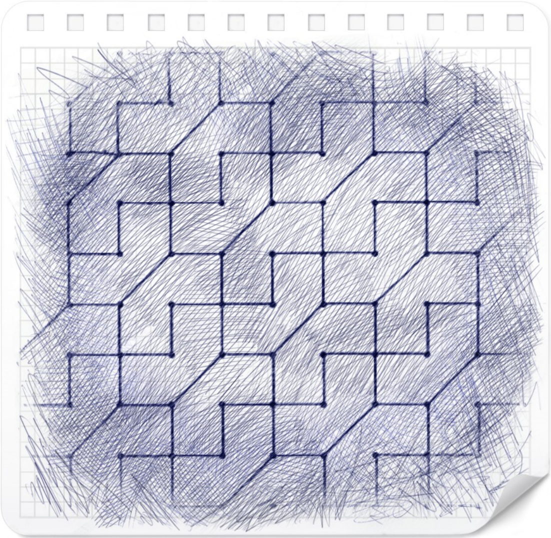
Григорий Фельдман

Физтех-лицей

feldman@wowmath.ru

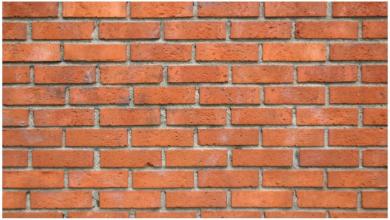
12 сентября 2015

Кто из нас не увлекался рисованием интересных орнаментов на бумаге?

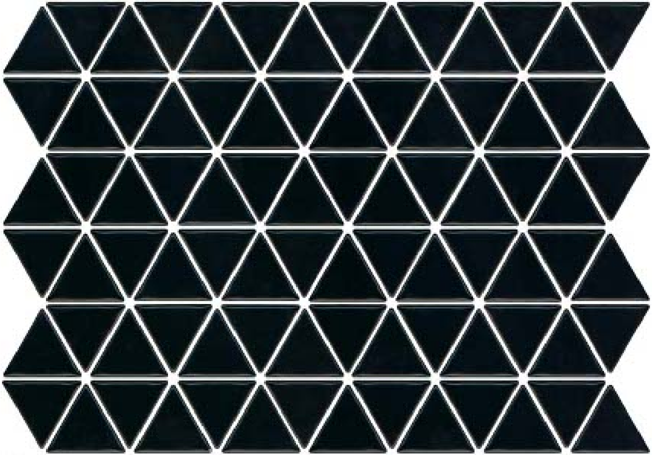


Некоторые даже стали заниматься этим профессионально и кладут плитку на дорогах.

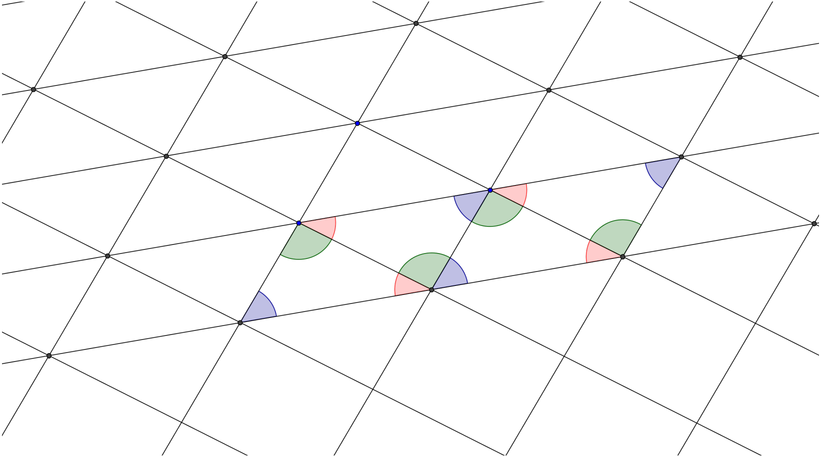
Интересно, какие бывают плитки? Самая знакомая — из прямоугольников:



Можно придумать еще одну плитку — из правильных треугольников:



Забавно, что замостить можно плоскость любыми треугольниками. То, что это действительно замощение, следует из того, что сумма углов треугольника 180 градусов:



А какими четырехугольниками можно замостить плоскость?

А какими четырехугольниками можно замостить плоскость?

Любыми!

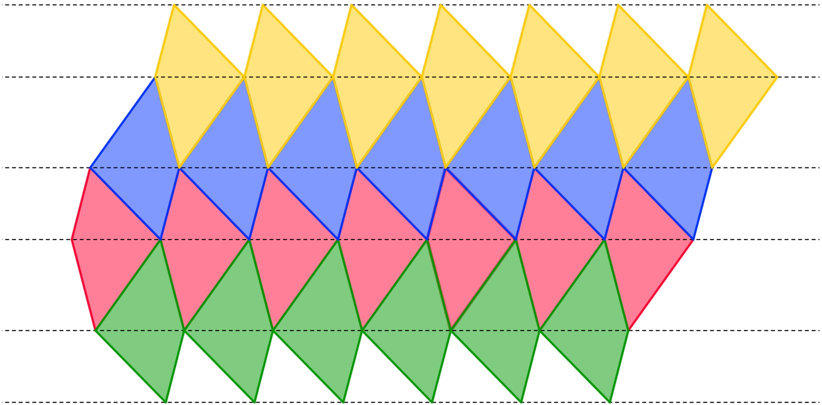
А какими четырехугольниками можно замостить плоскость?

Любыми!

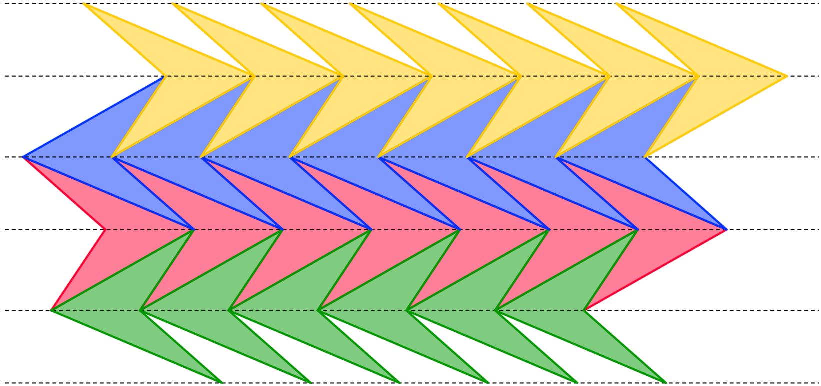
Теорема

Плоскость можно замостить любым четырёхугольником.

Идея замощения очень простая: будем укладывать четырехугольники диагоналями друг к другу:



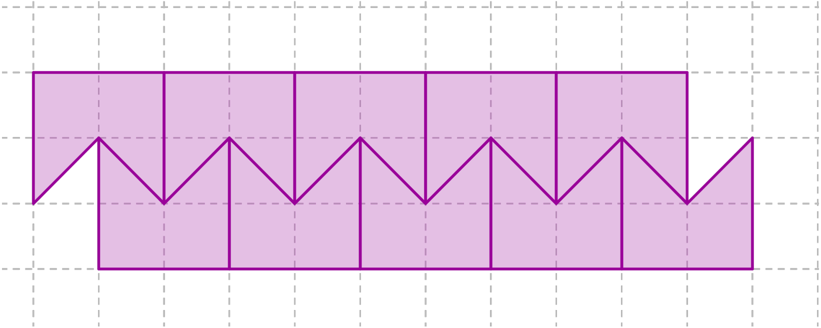
Кстати, то же построение подходит даже для невыпуклых четырехугольников:



А как дела с пятиугольниками?

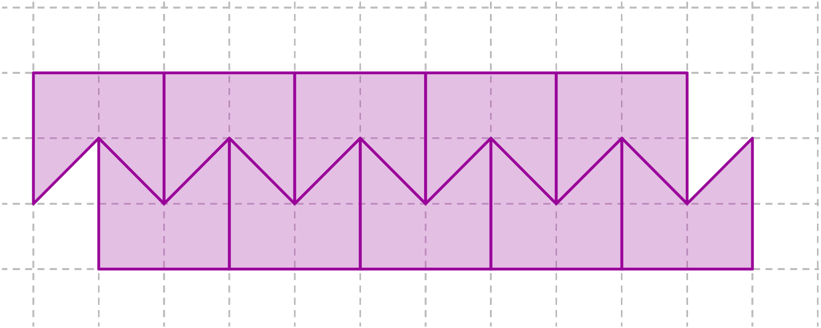
А как дела с пятиугольниками?

Вот пример:



А как дела с пятиугольниками?

Вот пример:



Он невыпуклый:(

А есть замощения *выпуклым* пятиугольником?

А есть замощения *выпуклым* пятиугольником?

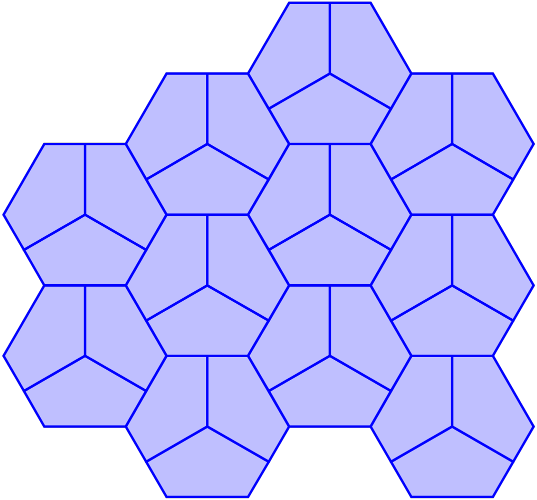
Ок, для начала замостим плоскость шестиугольниками.

А есть замощения *выпуклым* пятиугольником?

Ок, для начала замостим плоскость шестиугольниками.

Это любая пчела может сделать! :)

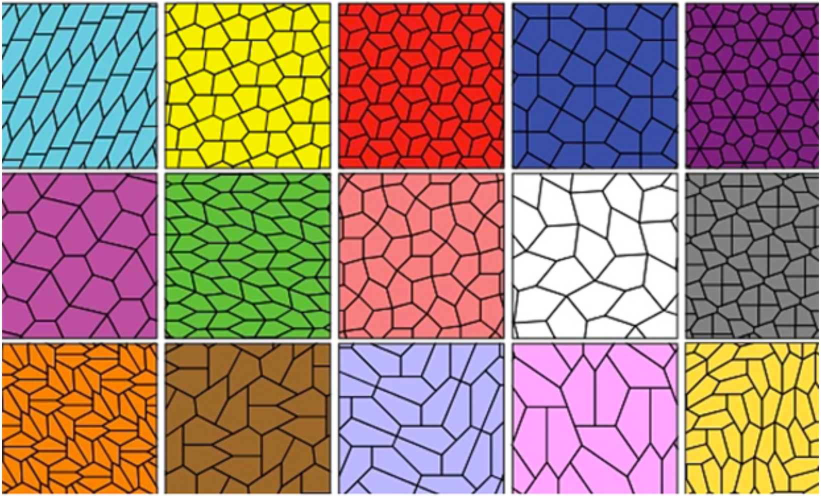
А теперь сделаем трюк!
Разрежем каждый шестиугольник на 3 одинаковых пятиугольника.



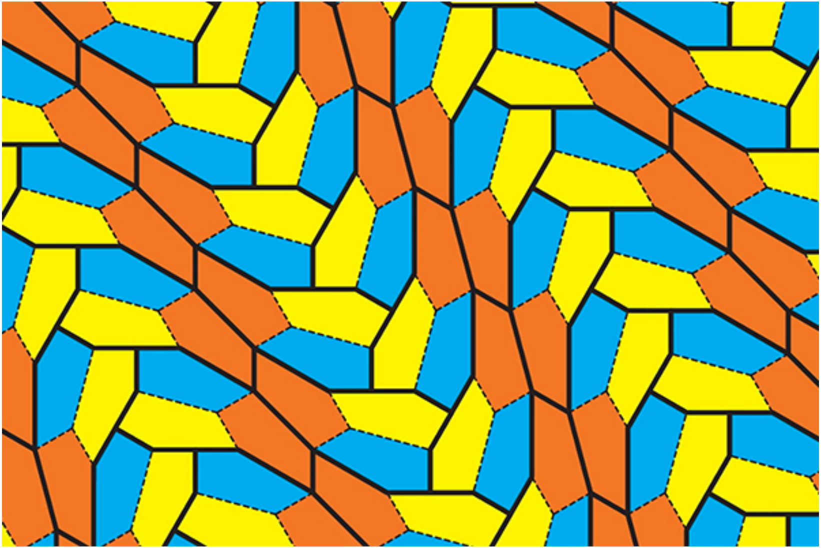
А какие еще бывают замощения пятиугольниками?

А какие еще бывают замощения пятиугольниками?

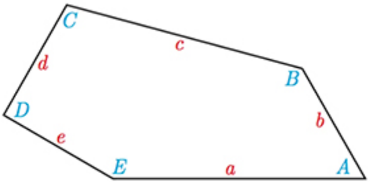
Этот вопрос до сих пор открыт. Пока известно 15 замощений:



Замощение таким пятиугольником было открыто совсем недавно, в июле 2015 года:



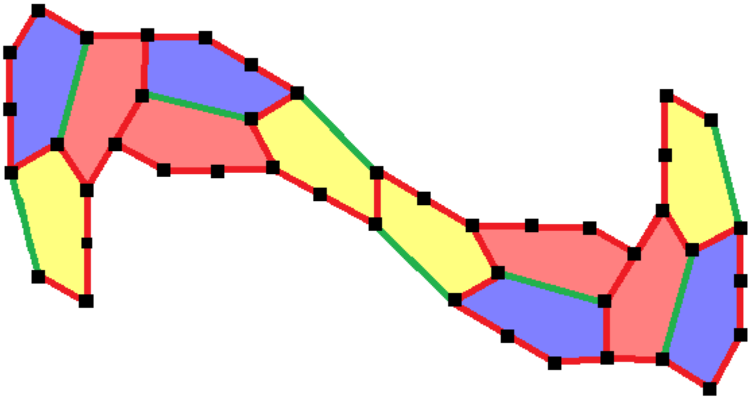
Замощение устроено довольно хитроумно:



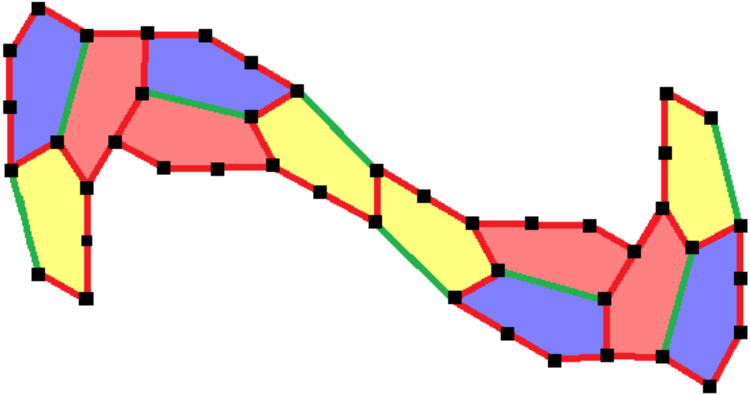
$A = 60°$
$B = 135°$
$C = 105°$
$D = 90°$
$E = 150°$

$a = 1$
$b = 1/2$
$c = \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}$
$d = 1/2$
$e = 1/2$

Понять, почему же это действительно замощение, можно из такой странной картинки:

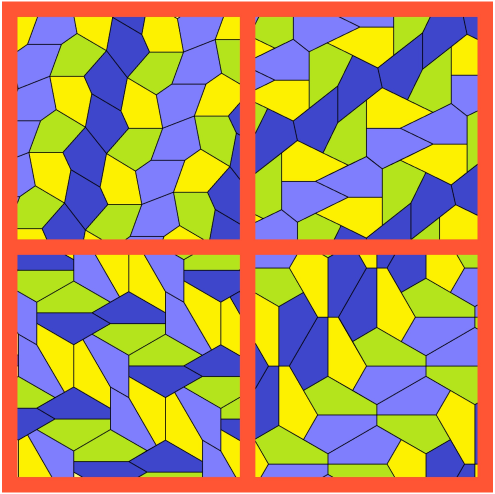


Понять, почему же это действительно замощение, можно из такой странной картинки:



Обратите внимание, что эта фигурка после параллельного сдвига идеально «пристыковывается» сама к себе.

А эти 4 замощения открыта домохозяйка Марджори Райс, изучив статью Мартина Гарднера в журнале Scientific American[1]:



[1] Журнал, кстати, выписывал сын.

Ок, пятиугольники — это очень интересно.

А что, например, с 15-угольниками?

Ок, пятиугольники — это очень интересно.

А что, например, с 15-угольниками?

Теорема

Никаким выпуклым n-угольником с $n \geqslant 6$ нельзя замостить плоскость.

Ок, пятиугольники — это очень интересно.

А что, например, с 15-угольниками?

Теорема

Никаким выпуклым n-угольником с $n \geqslant 6$ нельзя замостить плоскость.

- А если n-угольник *невыпуклый*?

Ок, пятиугольники — это очень интересно.

А что, например, с 15-угольниками?

Теорема

Никаким выпуклым n-угольником с $n \geqslant 6$ нельзя замостить плоскость.

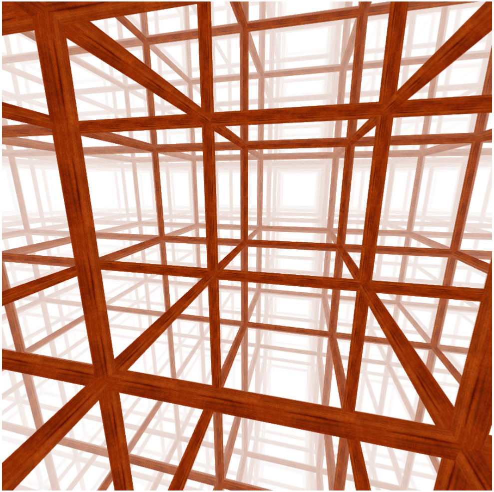
- А если n-угольник *невыпуклый*?
- А можно замостить плоскость *различными выпуклыми* n-угольниками?

Ок, многоугольники — это очень интересно, но это все на плоскости.

Ок, многоугольники — это очень интересно, но это все на плоскости.

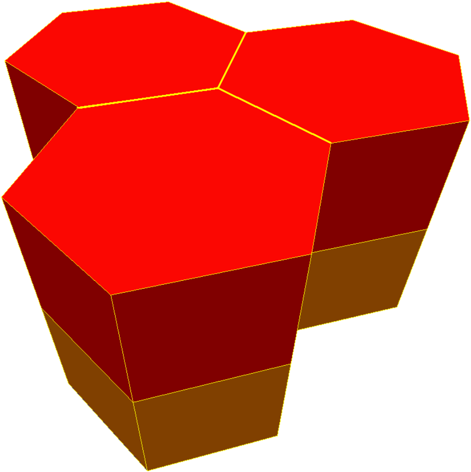
В пространстве есть замощения?

Есть! Например, кубиками точно можно замостить :)

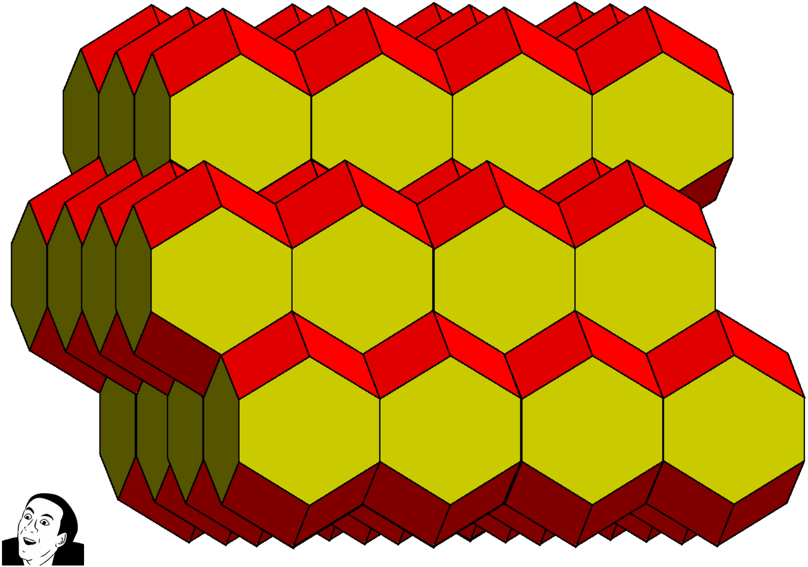


А призмами можно?

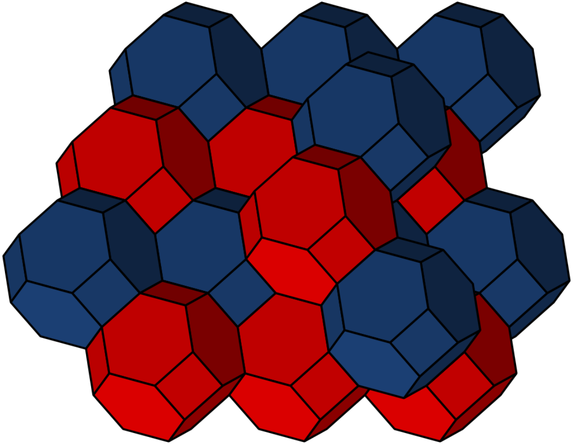
А призмами можно?
Да!



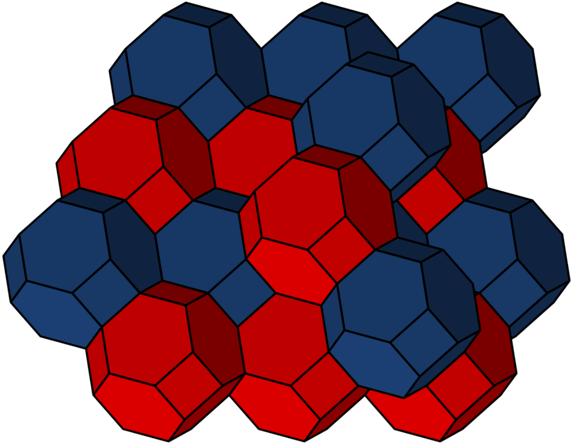
Можно даже *гексаромбическим додекаэдром*!



А вот ещё одно замощение пространства — усечённым октаэдром:

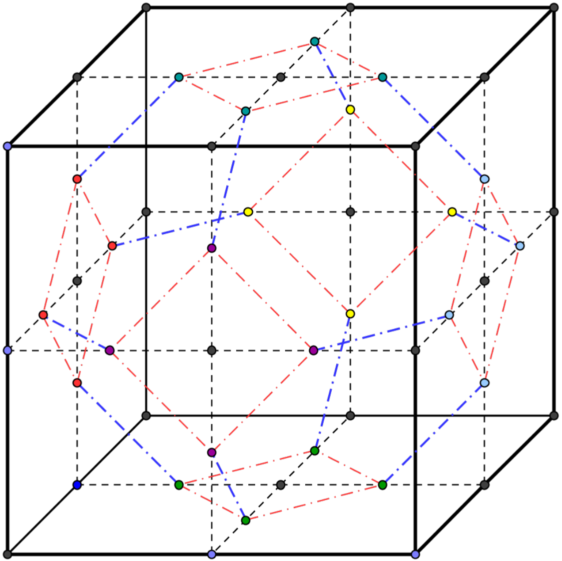


А вот ещё одно замощение пространства — усечённым октаэдром:



Оно кажется очень сложным, но на самом деле легко получается из замощения пространства кубиками.

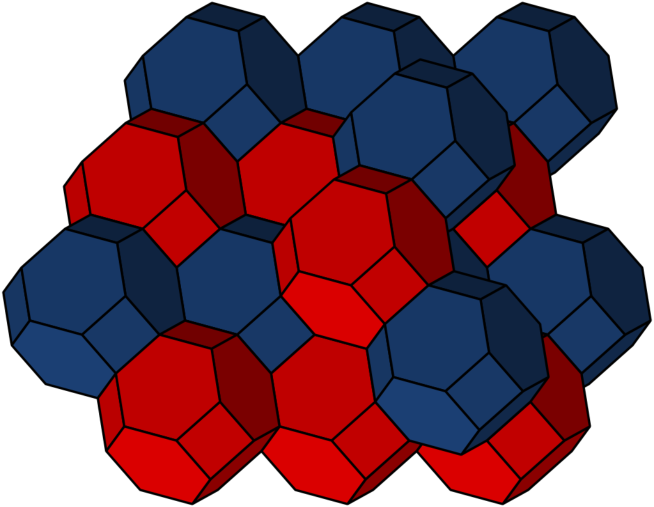
Для начала нужно разобраться, как же выглядит усечённый октаэдр:



Рассмотрим центры кубиков A_i, замощающих пространство.

Понятно, что эти центры — вершины кубиков B_j, тоже замощающих пространство.

Синие усечённые октаэдры вписаны в кубики A_i, а красные — в B_j.



Какими многогранниками можно замостить пространство?

Какими многогранниками можно замостить пространство?

Этот вопрос до сих пор не решён.

Классифицированы только замощения правильными и полуправильными многогранниками.

Какими многогранниками можно замостить пространство?

Этот вопрос до сих пор не решён.

Классифицированы только замощения правильными и полуправильными многогранниками.

Теорема

Среди правильных многогранников (правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) пространство можно замостить только кубом.

Какими многогранниками можно замостить пространство?

Этот вопрос до сих пор не решён.

Классифицированы только замощения правильными и полуправильными многогранниками.

Теорема

Среди правильных многогранников (правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) пространство можно замостить только кубом.

- Докажите, что пространство нельзя замостить правильным тетраэдром.

Мы поговорили о замощениях на плоскости и в пространстве.

Мы поговорили о замощениях на плоскости и в пространстве.
А теперь — замощение плоскости Лобачевского треугольниками!